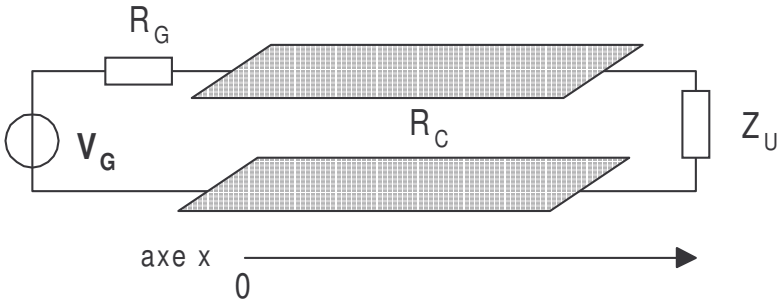
Construction et utilisation de l'abaque de Smith

L'abaque de Smith est l'outil graphique le plus utilisé dans le domaine des hautes fréquences. Des appareils de mesure comme les analyseurs de réseau donnent une représentation de leurs acquisitions dans ce type d'abaque (au choix avec un plan de Bode) ; les constructeurs de composants HFet micro-ondes présentent également souvent les caractéristiques de leurs produits par le même moyen. Il s'agit donc d'un outil dont la maîtrise est indispensable pour l'étude de circuit haute et hyper fréquence.
D'autre part, l'abaque de Smith donne une représentation graphique simple de phénomènes décrits par des équations mathématiques complexes ; elle permet une meilleure compréhension du comportement d'une ligne.
Son application dépasse l'étude des phénomènes de propagation et permet en particulier de résoudre les problèmes d'adaptation d'impédance en général et ce qui en découle (gain, stabilité, bande passante et stabilité d'un amplificateur HF).
Comme nous allons le voir, l'abaque de Smith n'est rien d'autre qu'une représentation du plan complexe avec une graduation permettant de lire la valeur d'impédance associée à un coefficient de réflexion.
Dans la première partie nous introduirons quelques éléments nécessaires à sa construction et dans la seconde nous nous intéresserons aux différentes utilisations. En troisième partie, on résumera les principales notions à connaître sur l'abaque.
En annexe, on trouvera les éléments nécessaires à la construction logicielle d'un abaque, avec Scilab (la méthode étant facilement adaptable à d'autres langages de programmation). L'intérêt de cette construction est essentiellement d'ordre pédagogique, de nombreux logiciels ayant été développés afin de permettre de travailler avec cet abaque.

Eléments de construction

Considérons une ligne sans pertes d'impédance caractéristique R_C, chargée par une impédance Z_U. La référence de longueur x=0 est prise au niveau du générateur.



a) Coefficient de réflexion

Rappeler l'expression du coefficient de réflexion $\underline{\rho(x)}$ sur un point de la ligne situé à une distance x du générateur, en fonction des modules des tensions incidente et réfléchie, de z ainsi que de la longueur d'onde λ (voir exercice précédent)
Rappeler également les propriétés du module et de la phase de $\underline{\rho(x)}$ pour une ligne sans perte.

b) Tension le long de la ligne

Exprimer maintenant la valeur complexe de la tension $\underline{V(x)}$ en un point de la ligne en fonction de la valeur de la tension incidente Vi (que nous prendrons comme origine des phases) et de $\underline{\rho(x)}$
Donner une représentation graphique dans le plan complexe et déterminer comment évolue cette représentation suivant que l'on se déplace sur la ligne vers le générateur ou vers la charge.
A quoi correspond une distance de λ sur la ligne ?

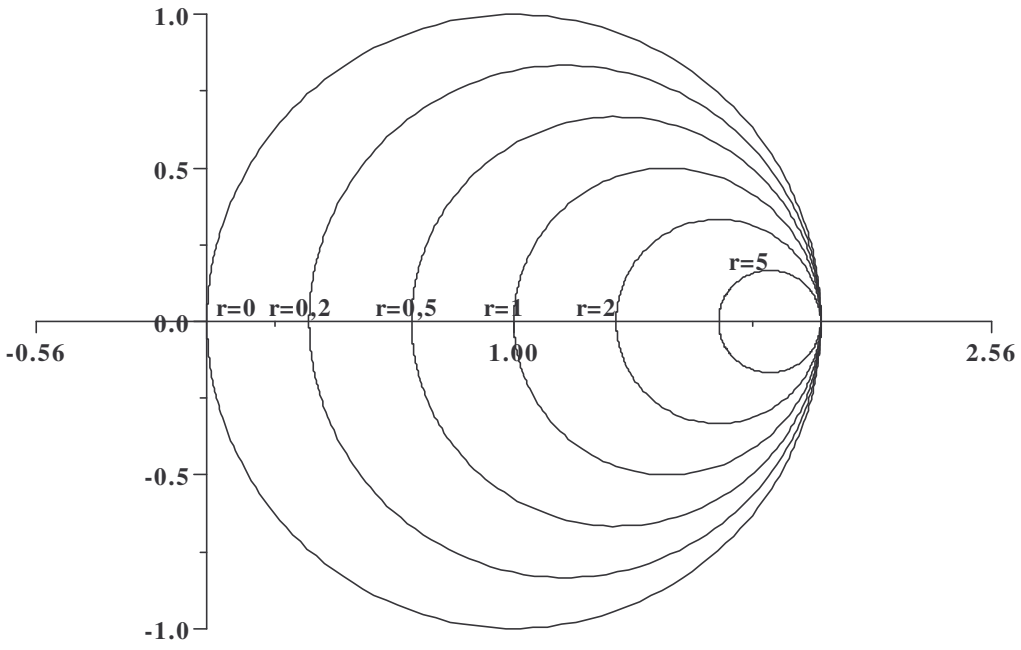
Afin d'adapter la représentation à tous les cas particuliers, celle ci est normalisée par rapport à une tension incidente unitaire. Donner la nouvelle représentation graphique.

c) Impédance le long de la ligne

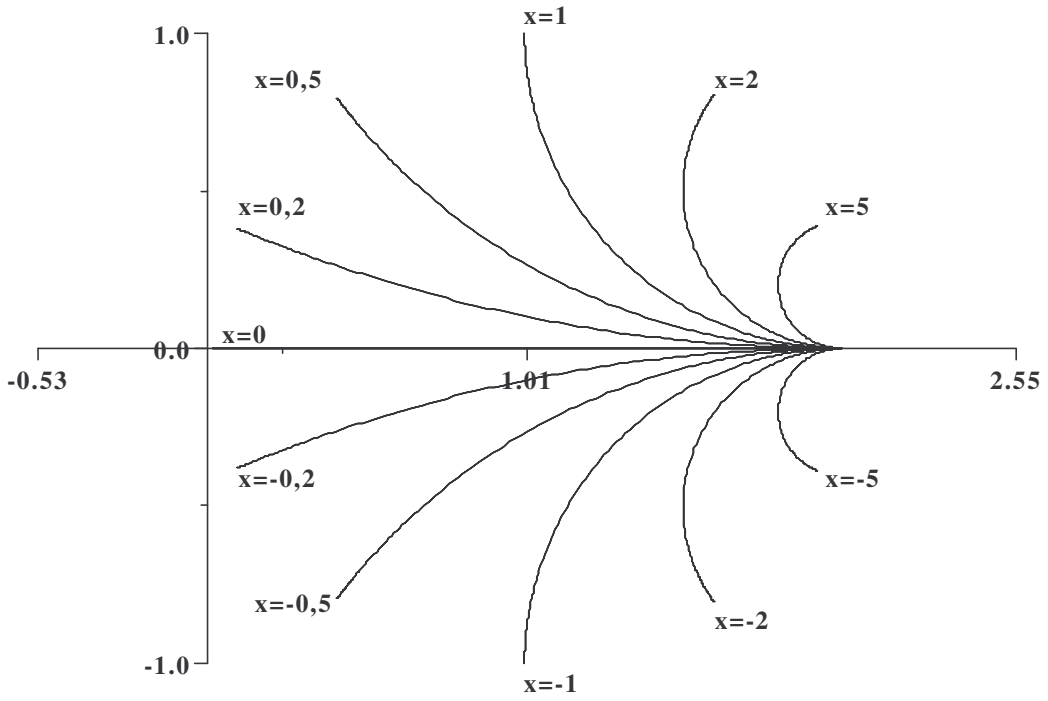
Rappeler l'expression du coefficient de réflexion $\underline{\rho(x)}$ en fonction de R_C et de l'impédance $\underline{Z(x)}$ en un point quelconque de la ligne.
Afin de généraliser cette expression, là aussi on normalise par rapport à R_C. Exprimer alors $\underline{\rho(x)}$ en fonction de la nouvelle impédance normalisée $\underline{z(x)} = \dfrac{Z(x)}{R_C}$

D'après l'équation qui précède, à chaque valeur de $\underline{\rho(x)}$, dont le module peut évoluer entre 0 et 1, correspond une impédance normalisée z(x). L'abaque de Smith est simplement une graduation du plan complexe par :

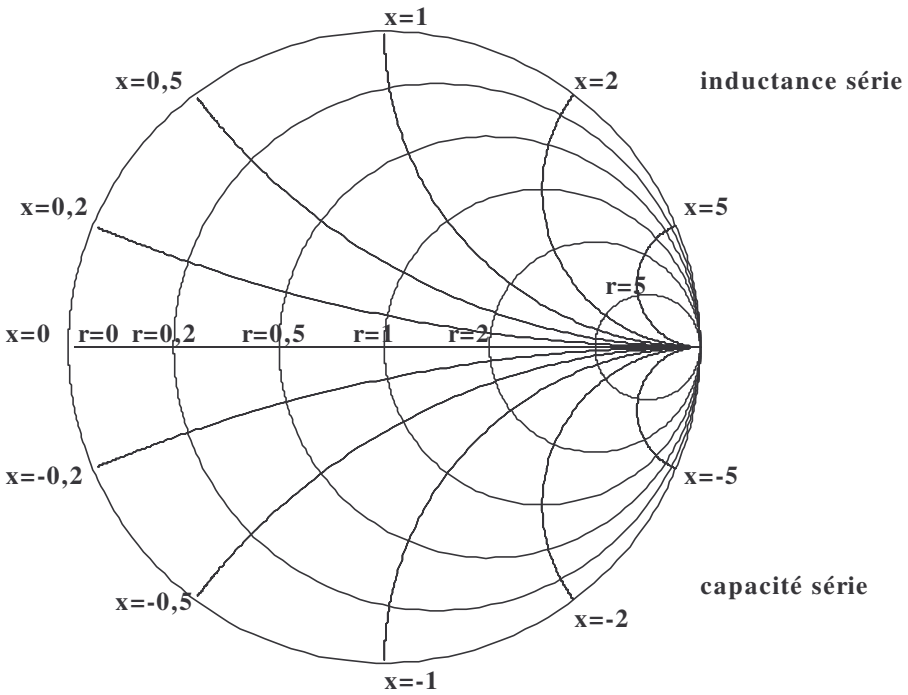
- les lieux des points où la valeur réelle de $\underline{z(x)}$ est constante, comme le montre la figure suivante :



- les lieux des points où la valeur imaginaire de $\underline{z(x)}$ est constante comme le montre la figure suivante:



En assemblant les deux tracés précédents on obtient alors l'abaque complète :



Afin de se familiariser avec cet abaque, repérons quelques points. Pour cela, partons de graphe de Fresnel établi pour les tensions aux questions précédentes et représentons les vecteurs obtenus dans le cas d'une impédance $\underline{Z(x)}$ infinie, puis nulle et égale à R_C . Vérifier la correspondance des points sur l'abaque de Smith.

En repartant de l'expression du coefficient de réflexion en fonction de l'endroit où on se trouve sur la ligne, déterminer comment se traduit un déplacement le long de la ligne, de la charge vers le générateur, puis dans le sens inverse.

Que deviennent alors les points précédents lorsque l'on se déplace de $\lambda/4$ sur la ligne ? Est ce le résultat attendu ?

Principe d'utilisation

Afin d'illustrer les principales propriétés de l'abaque, nous prendrons comme exemple une ligne d'impédance caractéristique 50 Ω, alimentée par un générateur adapté, à une fréquence de 2 GHz. La longueur relative de la ligne est 1,3 λ (si on appelle λ la longueur d'onde λ=10 cm à 2 GHz avec une vitesse de propagation de $2\ 10^8$ m/s sur la ligne).
L'impédance de la charge vaut $Z_U=(25+10j)\Omega$.
Les exercices suivants pourront être faits sur un abaque "papier" ou à l'aide d'un logiciel comme MMIP. Dans ce dernier cas, il est important afin de bien comprendre l'utilisation de l'abaque, d'avoir prévu sur un abaque papier, même de manière grossière, les résultats donnés par le logiciel.

a) Représentation de l'impédance

Nous avons vu que la graduation de l'abaque est normalisée par rapport à l'impédance caractéristique.
Représenter alors le point correspondant à $z_u=Z_U/R_C$ sur l'abaque.

L'une des principales utilisations de l'abaque est le calcul de circuits d'adaptation d'impédance. Ceux-ci étant composés éventuellement d'association en série et parallèle d'éléments réactifs, il est nécessaire de savoir réaliser cette opération d'association sur l'abaque. Comment se déplace alors le point correspondant à Z_U si on lui ajoute une inductance en série ? une capacité ?

b) Lecture du coefficient de réflexion et de la tension

Lire la valeur du coefficient de réflexion au niveau de la charge (module et phase) et vérifier par le calcul.
Si l'amplitude crête du générateur vaut 5 V, lire sur l'abaque l'amplitude et la phase de la tension aux bornes de la charge. Vérifier par le calcul.

c) Représentation d'un déplacement sur la ligne

Nous avons vu la périodicité du coefficient de réflexion $\underline{\rho(x)}$ était de $\lambda/2$, en conséquence de quoi une rotation complète sur l'abaque correspondait à un déplacement de $\lambda/2$ (vers la charge dans le sens positif, vers le générateur dans le sens négatif).
Lire sur l'abaque l'impédance d'entrée de la ligne. Vérifier par le calcul.
Lire également la tension à l'entrée de la ligne (en module et en phase). Vérifier par le calcul.
Rappeler quelle tension est prise pour origine des phases.

d) Lecture d'une admittance

Rappeler l'expression liant le coefficient de réflexion $\underline{\rho(x)}$ en fonction de l'impédance $\underline{z(x)}$ en un point de la ligne.

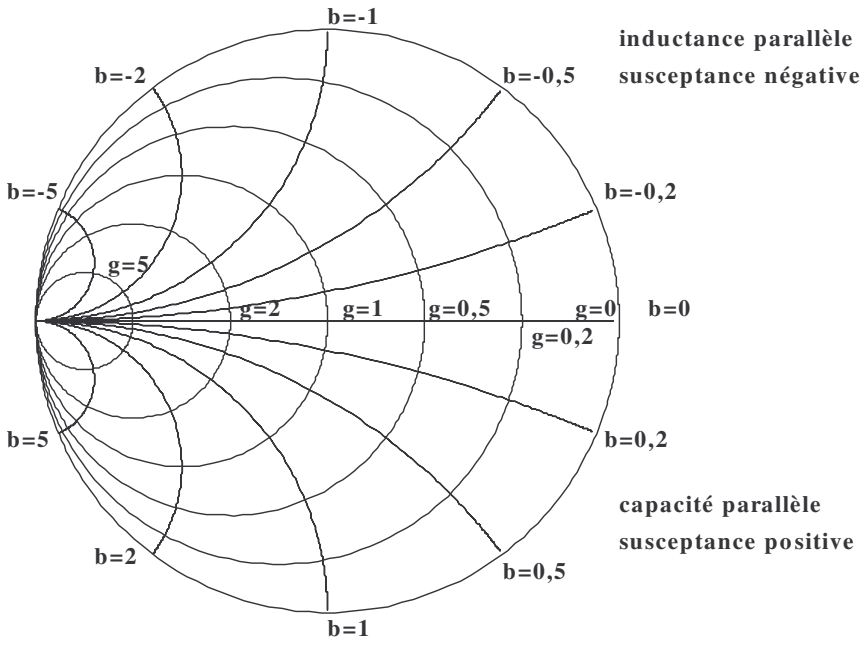
Replaçons $\underline{z(x)}$ par son admittance $\underline{y(x)}=\dfrac{1}{\underline{z(x)}}$ dans l'expression de $\underline{\rho(x)}$.

Comment sont modifiés la phase et le module de $\underline{\rho(x)}$? Conclure sur la manière de lire l'admittance correspondant à une admittance (et réciproquement) sur l'abaque.
Lire sur l'abaque la valeur de l'admittance à l'entrée et à la sortie de la ligne. Vérifier par le calcul.

Suite à la remarque concernant les circuits d'adaptation d'impédance, il est également nécessaire de savoir ajouter une impédance en parallèle sur l'abaque. Imaginons qu'une capacité C_E se trouve à l'entrée de la ligne, c'est à dire en parallèle sur l'impédance d'entrée Z_E de celle-ci. Deux solutions sont possibles :

- Après avoir déterminé le point de Z_E puis de Y_E, d'après les calculs que nous venons de faire, l'ajout d'une susceptance (partie imaginaire d'une admittance) normalisée $Y_E R_C$ se traduit par un déplacement positif (la partie imaginaire de l'admittance est positive) sur un cercle à résistance constante.

- Certains abaques, dits abaque d'impédance et d'admittance présentent deux graduations, une traditionnelle pour les impédances, l'autre symétrique par rapport au point (0,1) pour les admittances.
La partie supérieure de cette dernière graduation correspondant aux susceptances négatives, on peut donc lire directement l'admittance ou l'impédance suivant la graduation utilisée.
L'ajout d'une capacité se traduira alors par un déplacement, sur la graduation admittance, dans le sens négatif (la susceptance est positive mais l'échelle de l'abaque est inversée), sur un cercle à conductance constante.
La figure suivante représente un abaque de Smith gradué en admittance uniquement (les conductances étant repérées par la lettre g et les susceptances par la lettre b)



Déterminer par les deux méthodes la nouvelle impédance vue par le générateur si on lui ajoute une capacité de 1,27 pF à l'entrée de la ligne.

e) Lecture du taux d'onde stationnaire (TOS ou ROS)

Rappeler l'expression de la tension en un point quelconque de la ligne en fonction de la tension incidente Vi et du coefficient de réflexion $\underline{\rho(x)}$.

Lire sur l'abaque les points où on trouve les valeurs maximale V_{MAX} et minimale V_{MIN} de la tension (on supposera la ligne de longueur supérieure à $\lambda/2$). Vérifier par le calcul.

On rappelle que le taux d'ondes stationnaires est défini par $TOS=V_{MAX}/V_{MIN}$. Exprimer alors ce dernier en fonction de $\underline{\rho(x)}$.

Rappeler dans le cas d'une charge résistive normalisée $r_u=R_U/R_C$ l'expression de celle-ci en fonction de ρ_u.
Comparer les deux expressions obtenues et conclure sur la lecture directe du taux d'ondes stationnaires sur l'abaque de Smith.

Lire le taux d'ondes stationnaires et vérifier par le calcul.

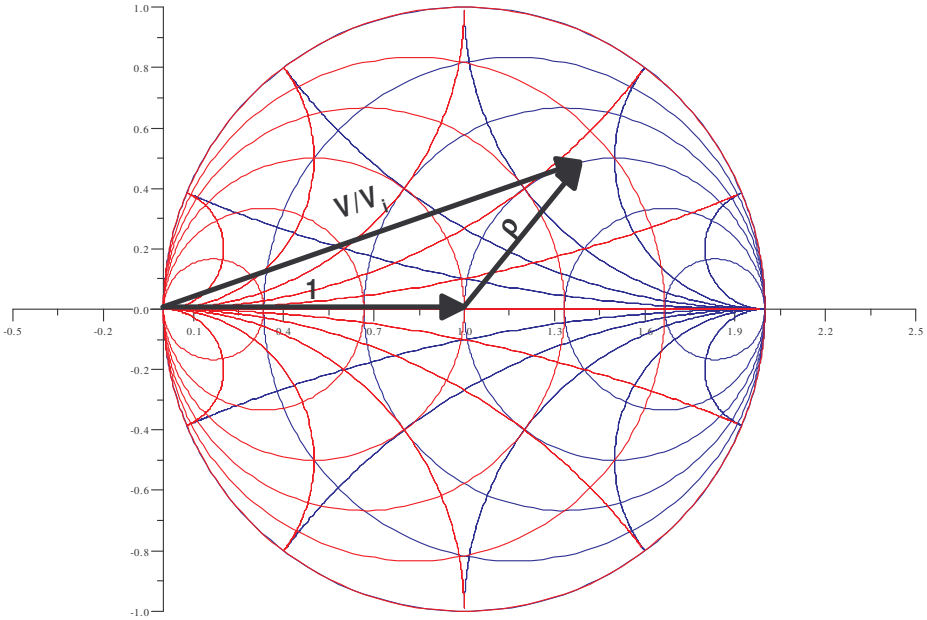
f) Représentation d'un déplacement sur la ligne d'impédance caractéristique différente

Les circuits d'adaptation d'impédances jouent couramment sur la valeur de l'impédance caractéristique d'une ligne.
Imaginons que le générateur soit relié à notre ligne 50 Ω par une ligne d'impédance caractéristique 130 Ω et de longueur relative 0,05.λ à 2 GHz.
Pour calculer la nouvelle impédance vue par le générateur, il est nécessaire de représenter l'impédance d'entrée de la ligne 50 Ω (déterminée comme précédemment) dans un abaque normalisé 130 Ω (c'est à dire de déplacer le point correspondant à Z_E), puis de procéder comme précédemment dans le cas d'une progression sur la ligne vers le générateur.
Calculer alors cette impédance.

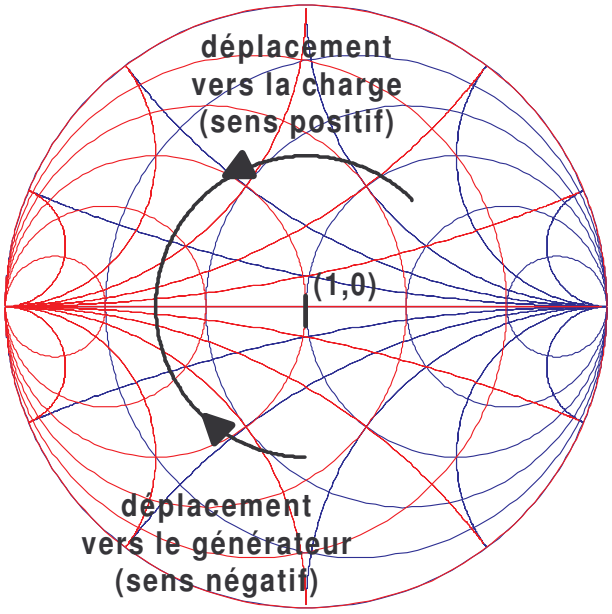
Résumé et compléments

La maîtrise des quelques éléments que nous venons de voir permettra une utilisation correcte et efficace de l'abaque de Smith. Il est essentiel de retenir les points suivants :

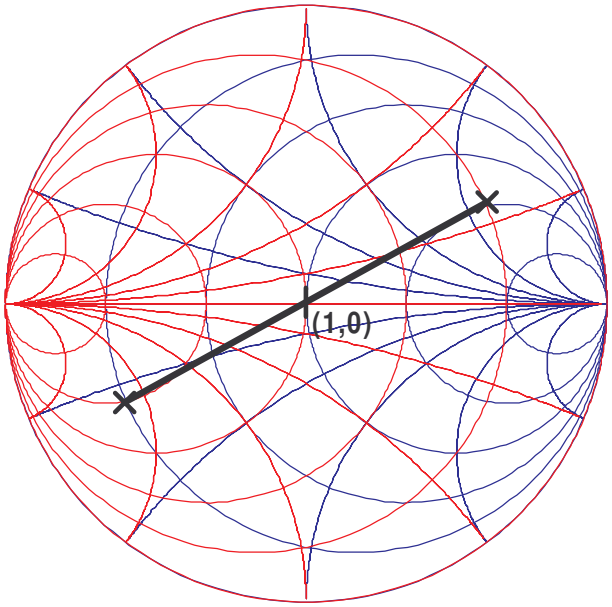
- notions de normalisation par rapport aux tensions et résistance caractéristique



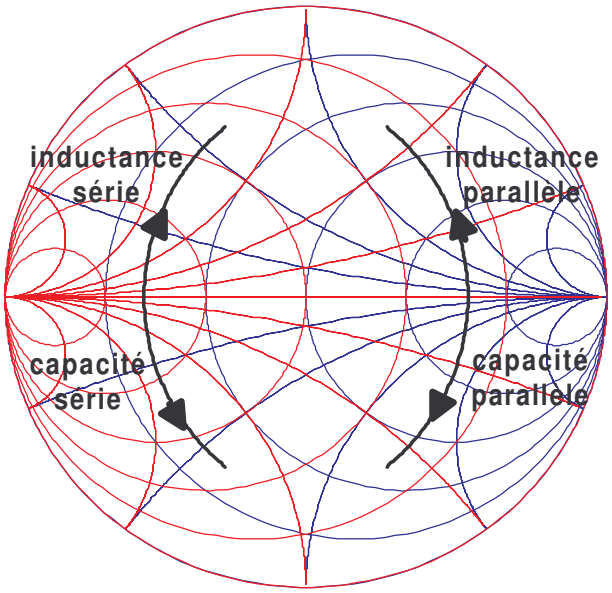
- déplacement sur l'abaque vers le générateur et vers la charge. Une rotation complète sur l'abaque correspond à un déplacement de λ/2 sur la ligne, vers le générateur pour le sens négatif et vers la charge pour le sens positif (voir convention de sens sur la première figure).



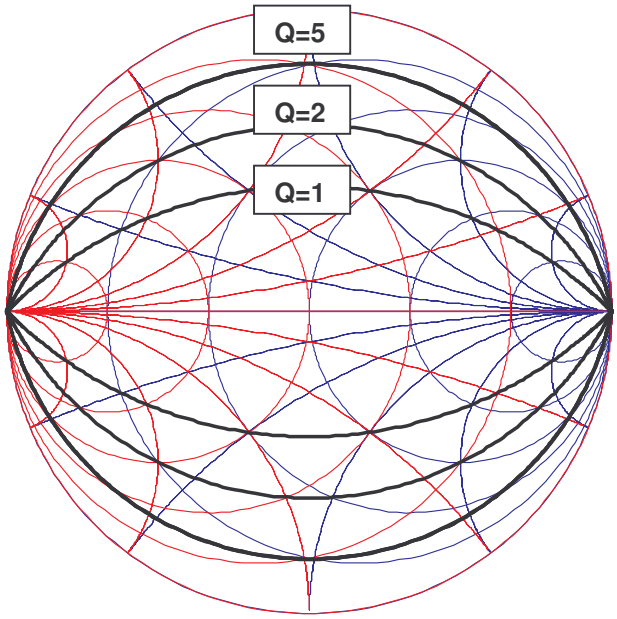
- conversion d'une impédance en admittance et réciproquement



- ajout d'une impédance en série et parallèle



- courbes à coefficients de qualité constant.



Cette notion est importante pour déterminer la bande passante et réponse en fréquence d'un quadripôle ; pour réaliser l'adaptation d'impédance d'un système à bande étroite, on peut se déplacer dans n'importe quel endroit de l'abaque, alors que pour un système à bande large, il faut veiller à rester dans une zone où le coefficient de qualité reste inférieur au rapport de la fréquence centrale sur la bande passante ($B=f_0/Q$). Le coefficient de qualité est lui aussi normalisé par rapport à la résistance caractéristique.

- déplacement sur une ligne d'impédance caractéristique différente de celle de la normalisation. Cette opération s'effectue par une normalisation du tracé par rapport à la nouvelle impédance caractéristique. Le déplacement le long de la ligne se fait alors de manière classique, puis on normalise de nouveau si nécessaire par rapport à l'ancienne impédance.

Une fois ces éléments maîtrisés, on peut ensuite passer aux différentes applications et en particulier l'utilisation de l'abaque pour le calcul de circuits d'adaptation d'impédance.

Annexe : programmes des illustrations

Tracé à partie réelle d'impédance constante.

```
clear;
// nombre de tracés et nombre de points par tracé
T=6; N=500;
// valeur des résistances affichées
param=[0   0.2   0.5   1   2    5];
//
// espacement logarithmique entre les points
abs_var=logspace(-2,3,N/2);
var=[abs_var(N/2:-1:1),-1*abs_var]';
//
// vecteur constant
cst=ones(N,1);
//
// définition des résistances, réactances et impédances
r=cst*param;
x=var*ones(1,T);
z=r+%i*x;
//
// calcul du coefficient de réflexion et vecteur tension
un=ones(N,T);
rau=(z-un)./(z+un);
vect=un+rau;
//
// affichage
xbasc();
// y=4 pour vue isométrique, z=5 pour tracer les axes
plot2d(real(vect), imag(vect),cst',"045",nax=[2,2,2,4]);
//
// commentaires
xstring( 0.03, 0, ["r=0"]); xstring( 0.2, 0, ["r=0,2"]); xstring( 0.55, 0, ["r=0,5"]);
xstring( 0.9, 0, ["r=1"]); xstring( 1.2, 0, ["r=2"]); xstring( 1.7, 0.15, ["r=5"]);
```

Tracé à partie imaginaire d'impédance constante.

```
clear;
// nombre de tracés et nombre de points par tracé
T=6; N=500;
//
// valeur des réactances affichées
param=[0   0.2   0.5   1   2    5];
val_x=[-1*param(T:-1:1),param];
//
// espacement logarithmique entre les points
abs_var=logspace(-2,3,N/2);
var_r=[abs_var(N/2:-1:1) , abs_var]';
//
// vecteur constant
cst=ones(N,1);
//
// définition des résistances, réactances et impédances
r=var_r*ones(1,2*T);
x=cst*val_x;
z=r+%i*x;
```

```
,,
//
//
//
// calcul du coefficient de réflexion et vecteur tension
un=ones(N,2*T);
rau=(z-un)./(z+un);
vect=un+rau;
//
// affichage
xbasc();
// y=4 pour vue isométrique, z=5 pour tracer les axes
plot2d(real(vect), imag(vect),cst',"045",nax=[2,2,2,2]);
//
// commentaires
xstring( 0.05, 0, ["x=0"]); xstring( 0.1, 0.4, ["x=0,2"]); xstring( 0.15, 0.8, ["x=0,5"]);
xstring( 1, 1, ["x=1"]); xstring( 1.6, 0.8, ["x=2"]); xstring( 1.95, 0.4, ["x=5"]);
xstring( 0.1, -0.45, ["x=-0,2"]); xstring( 0.15, -0.85, ["x=-0,5"]);
xstring( 1, -1.1, ["x=-1"]); xstring( 1.6, -0.9, ["x=-2"]); xstring( 1.95, -0.45, ["x=-5"]);
```

Tracé complet de l'abaque d'impédance.

```
// nombre de tracés et nombre de points par tracé
T=6; N=500;
//
// valeur de résistances et réactances affichées
param_r=[0   0.2   0.5   1   2    5];
param_x=[-1*param_r(T:-1:1),param_r];
//
// variations logarithmiques pour les résistances et réactances
abs_var=logspace(-2,3,N/2);
var_r=[abs_var(N/2:-1:1) , abs_var]';
var_x=[abs_var(N/2:-1:1),-1*abs_var]';
//
// définition d'une constante
cst=ones(N,1);
//
// calcul des résistances, réactances et impédances
r1=cst*param_r;
x1=var_x*ones(1,T);
r2=var_r*ones(1,2*T);
x2=cst*param_x;
r=[r1,r2];
x=[x1,x2];
z=r+%i*x;
//
// calcul du coefficient de réflexion et vecteur tension
un=ones(N,3*T);
rau=(z-un)./(z+un);
vect=un+rau;
//
// affichage
xset("window",0);xbasc(0);
// y=4 pour vue isométrique, z=0 pour effacer les axes
plot2d(real(vect), imag(vect),cst',"040");
//
// commentaires
xstring( 0.03, 0, ["r=0"]); xstring( 0.2, 0, ["r=0,2"]); xstring( 0.55, 0, ["r=0,5"]);
```

```
//
xstring( 0.9, 0, ["r=1"]); xstring( 1.2, 0, ["r=2"]); xstring( 1.7, 0.15, ["r=5"]);
xstring( -0.2, 0, ["x=0"]); xstring( -0.15, 0.4, ["x=0,2"]); xstring( 0.15, 0.8, ["x=0,5"]);
xstring( 1, 1, ["x=1"]); xstring( 1.6, 0.8, ["x=2"]); xstring( 1.95, 0.4, ["x=5"]);
//
//
//
xstring( -0.2, -0.45, ["x=-0,2"]); xstring( 0.15, -0.85, ["x=-0,5"]);
xstring( 1, -1.1, ["x=-1"]); xstring( 1.6, -0.9, ["x=-2"]); xstring( 1.95, -0.45, ["x=-5"]);
//
xstring(2, 0.8, ["inductance série"]); xstring(2, -0.8, ["capacité série"]);
//
```

Tracé de l'abaque d'admittance (à la suite du programme précédent)

```
//
// calcul de la nouvelle expression du coefficient de réflexion et vecteur tension
rau_ad=-rau;
vect_ad=un+rau_ad;
//
// affichage
xset("window",1);xbasc(1);
// y=4 pour vue isométrique, z=0 pour effacer les axes
plot2d(real(vect_ad), imag(vect_ad),cst',"040");
//
xstring( 0.25, 0.15, ["g=5"]); xstring( 0.7, 0, ["g=2"]); xstring( 1.05, 0, ["g=1"]);
xstring( 1.35, 0, ["g=0,5"]); xstring( 1.7, -0.1, ["g=0,2"]); xstring( 1.85, 0, ["g=0"]);
//
xstring( 2.1, 0, ["b=0"]); xstring( -0.1, 0.4, ["b=-5"]); xstring( 0.2, 0.8, ["b=-2"]);
xstring( 1, 1, ["b=-1"]); xstring( 1.6, 0.8, ["b=-0,5"]); xstring( 1.95, 0.4, ["b=-0,2"]);
//
xstring( -0.1, -0.45, ["b=5"]); xstring( 0.2, -0.85, ["b=2"]);
xstring( 1, -1.1, ["b=1"]); xstring( 1.6, -0.9, ["b=0,5"]); xstring( 1.95, -0.45, ["b=0,2"]);
//
xstring(2, 0.8, ["inductance parallèle";"susceptance négative"]);
xstring(2, -0.8, ["capacité parallèle";"susceptance positive"]);
```

Tracé d'un déplacement sur la ligne

```
theta=[%pi/4 : .01 : 3*%pi/2] ;
rau_dc=.5*exp(%i*theta) ;
vect_dc=ones(1,length(rau_dc))+rau_dc;
xset("thickness",3);
plot2d(real(vect_dc), imag(vect_dc),1,"000");
```

Tracé d'un déplacement à réactance constante

```
x_imp=[-.6: 0.01: .6];
r_imp=0.3*ones(1,length(x_imp));
z_imp=r_imp+%i*x_imp;
un_imp=ones(1, length(x_imp));
rau_imp=(z_imp-un_imp)./(z_imp+un_imp);
vect_imp=un_imp+rau_imp;
//
xset("thickness",3);
```

```
plot2d(real(vect_imp), imag(vect_imp),1,"000");
```

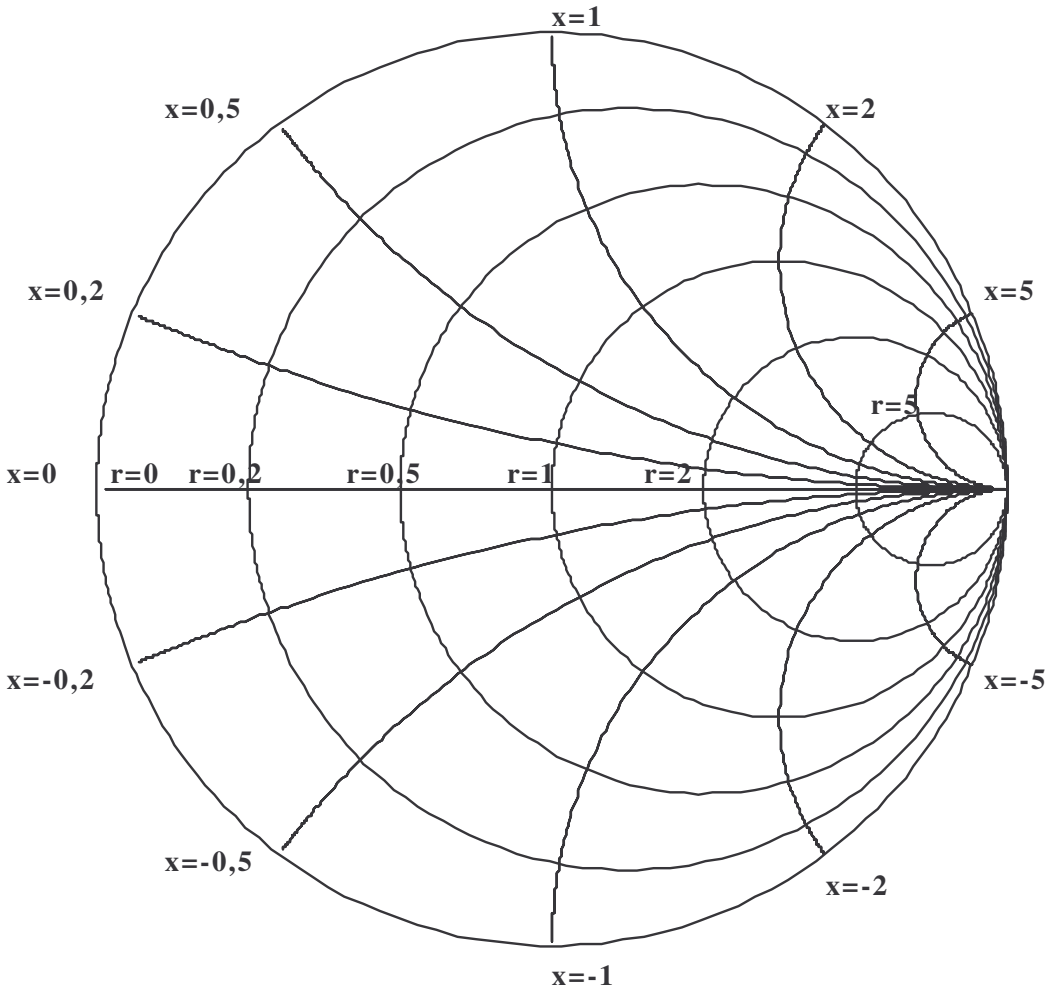
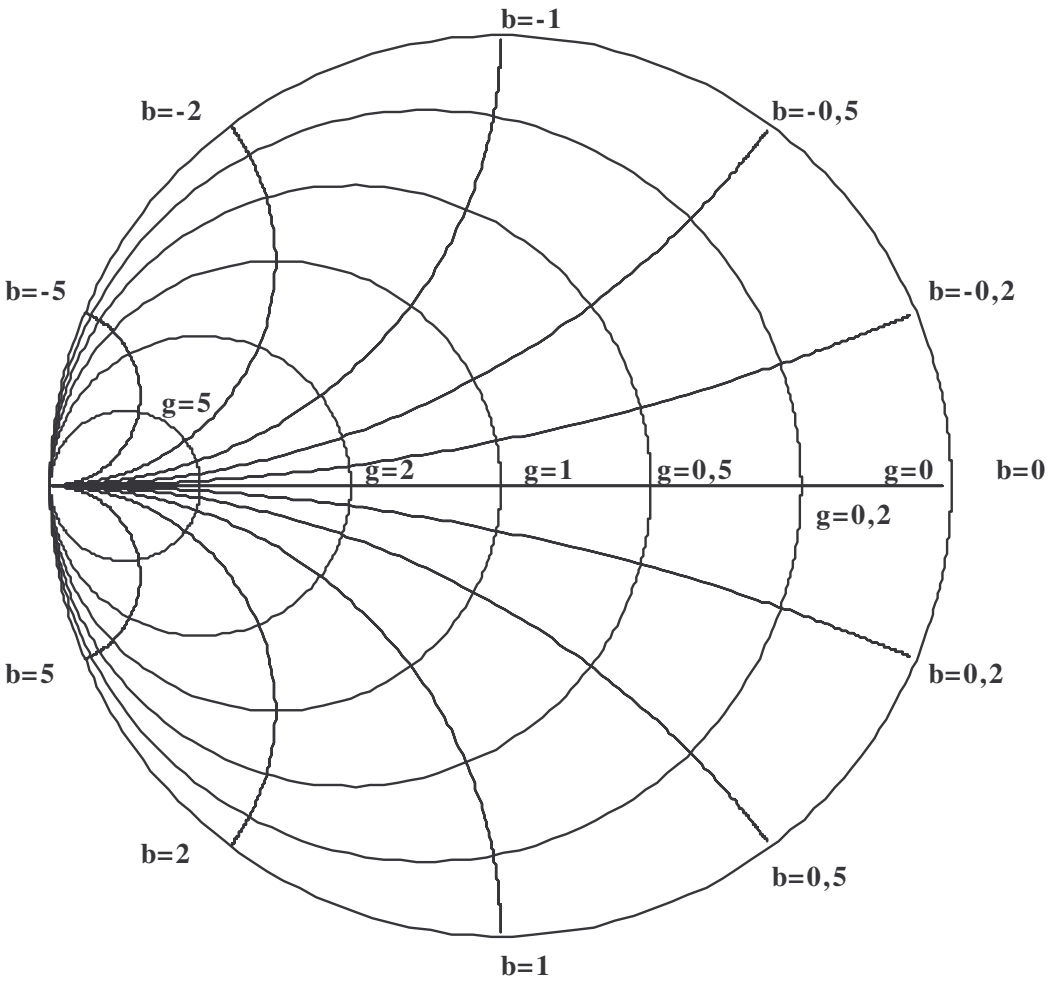
Tracé d'un déplacement à susceptance constante

```
rau_adm=-rau_imp;
vect_adm=un_imp+rau_adm;
//
xset("thickness",3);
plot2d(real(vect_adm), imag(vect_adm),1,"000");
```

Tracé d'un déplacement à coefficient de qualité constant

```
Q=1;
r_q1=logspace(-4,3,N/2);
r_q2=r_q1(N/2 : -1 : 1);
x_q1=Q.*r_q1;
x_q2=-Q.*r_q2;
r_q=[r_q1,r_q2];
x_q=[x_q1,x_q2];
z_q=r_q+%i*x_q;
rau_q=(z_q-ones(1,N))./(z_q+ones(1,N));
vect_q=ones(1,N)+rau_q;
xset("thickness",3);
plot2d(real(vect_q), imag(vect_q),1,"000");
```

Annexe 2 : abaque impédance



Annexe 3 : abaque admittance